

Relationen

(Wiederholung)

- Sei R eine binäre Relation auf A : $R \subseteq A \times A$
- Eigenschaften
 - ▶ Reflexivität: $\forall x \in A : xRx$
 - ▶ Vollständigkeit: $\forall x, y \in A : (xRy) \vee (yRx)$
 - ▶ Transitivität: $\forall x, y, z \in A : (xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow xRz$
 - ▶ Symmetrie: $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$
 - ▶ Antisymmetrie: $\forall x, y \in A : (xRy) \wedge (yRx) \Rightarrow x = y$
- Typen von Relationen:
 - ▶ **Quasiordnung**: reflexiv, transitiv
 - ▶ **Partielle Ordnung**: reflexiv, transitiv, antisymmetrisch
 - ▶ **Äquivalenzrelation**: reflexiv, transitiv, symmetrisch

Präferenzen

- Grundlage eines rationalen Entscheidungsprozesses ist die Einstellung eines Agenten gegenüber einer Menge von Alternativen.
- Präferenzrelation
 - ▶ x ist mindestens so gut wie y: $x \succsim y$
 - ▶ y ist mindestens so gut wie x: $y \succsim x$
- Eigenschaften von rationalen Präferenzrelationen
 - ▶ **transitiv**
 - ▶ **vollständig**
 - ➔ vollständige Quasiordnung

Präferenzen (2)

- Präferenzrelation induziert **strikte Präferenzrelation** und **Indifferenzrelation**

- ▶ $x \succ y \iff (x \succsim y) \wedge \neg(y \succsim x)$
- ▶ $x \sim y \iff (x \succsim y) \wedge (y \succsim x)$

- Unterschied zwischen Indifferenz und Unvollständigkeit

- **Beispiel:** Apfel $\sim$ Birne $\succ$ Banane

Apfel $\succsim$ Birne

Birne $\succsim$ Apfel

Apfel $\succsim$ Banane

Birne $\succsim$ Banane

Bündelungsfunktionen

- Sei A eine Menge von Alternativen, $N = \{1, \dots, n\}$ eine Menge von Wählern und $\mathcal{R}$ eine Menge von Präferenzrelationen über A .
- Eine **social choice function (SCF)** ist eine Funktion
$$f : \mathcal{R}^n \rightarrow A$$
- Eine **social choice correspondence (SCC)** ist eine Funktion
$$f : \mathcal{R}^n \rightarrow 2^A$$
- Eine **social welfare function (SWF)** ist eine Funktion
$$f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$$

Grundlegende Eigenschaften

- Anonymität

- ▶ Symmetrie bezüglich der Wähler
- ▶ Def.: Eine Bündelungsfunktion f ist **anonym**, wenn für alle $\succsim_1, \dots, \succsim_n$ und alle Permutationen $\pi : N \rightarrow N$ gilt:
$$f(\succsim_1, \dots, \succsim_n) = f(\succsim_{\pi(1)}, \dots, \succsim_{\pi(n)})$$

- Neutralität

- ▶ Symmetrie bezüglich der Alternativen
- ▶ Def.: Eine Bündelungsfunktion f ist **neutral**, wenn für alle $\succsim_1, \dots, \succsim_n$ und alle Permutationen $\pi : A \rightarrow A$ gilt:
$$f(\pi(\succsim_1), \dots, \pi(\succsim_n)) = \pi(f(\succsim_1, \dots, \succsim_n))$$
- ▶ wobei $a \pi(\succsim) b \iff \pi(a) \succsim \pi(b)$ und $\pi(\{a, \dots, z\}) = \{\pi(a), \dots, \pi(z)\}$

SCCs mit zwei Alternativen

- **Mehrheitswahl**

$$f(\succsim_1, \dots, \succsim_n) = \begin{cases} \{a\} & \text{wenn } |\{i \mid a \succsim_i b\}| > |\{i \mid b \succsim_i a\}| \\ \{b\} & \text{wenn } |\{i \mid b \succsim_i a\}| > |\{i \mid a \succsim_i b\}| \\ \{a, b\} & \text{sonst} \end{cases}$$

- ▶ Bei einer ungeraden Anzahl von Wählern mit strikten Präferenzen ist Mehrheitswahl eindeutig, also eine SCF.

- Für jede anonyme und neutrale SCC gilt:

- ▶ Ob a (oder b) in der Ergebnismenge liegen, hängt nur von der Anzahl der Befürworter von a (bzw. b) ab. Außerdem ist diese Abhängigkeit für beide Alternativen gleich.

- Offensichtlich ist Mehrheitswahl anonym und neutral.

SCCs mit zwei Alternativen (2)

- Folgende SCC erfüllt auch Anonymität und Neutralität:

$$f(\succsim_1, \dots, \succsim_n) = \begin{cases} \{a\} & \text{wenn } |\{i \mid a \succsim_i b\}| \text{ ungerade und } |\{i \mid b \succsim_i a\}| \text{ gerade} \\ \{b\} & \text{wenn } |\{i \mid b \succsim_i a\}| \text{ ungerade und } |\{i \mid a \succsim_i b\}| \text{ gerade} \\ \{a, b\} & \text{sonst} \end{cases}$$

- ▶ Allerdings ist diese SCC keine wünschenswerte “Bündelungsfunktion”.

- Def.: Eine SCC $f(\succsim_1, \dots, \succsim_n)$ auf zwei Alternativen ist **monoton** wenn folgende Bedingungen für alle $\succsim_1, \dots, \succsim_n$ und alle Alternativen a, b erfüllt sind:

- ▶ Wenn $f(\cdot) = \{a\}$ und es einen Wähler i mit $b \succsim_i a$ gibt, dann gilt immer noch $f(\cdot) = \{a\}$ wenn Wähler i seine Präferenz zu $a \succsim_i b$ verändert.
- ▶ Wenn $f(\cdot) = \{a, b\}$, dann gilt $f(\cdot) = \{a\}$ sobald ein Wähler i seine Präferenz von $a \sim_i b$ zu $a \succ_i b$ oder von $b \succ_i a$ zu $a \succsim_i b$ ändert.

Satz von May

- Satz (May, 1952): Eine SCC auf zwei Alternativen entspricht genau dann der Mehrheitswahl wenn sie anonym, neutral und monoton ist.
 - ▶ Beweis:
 - “von links nach rechts”: Einfaches Überprüfen der Eigenschaften.
 - “von rechts nach links”: Beweisskizze für strikte Präferenzen an der Tafel.
- **Axiomatische Charakterisierung** der Mehrheitswahl
 - ▶ Mehrheitswahl ist die **einzigste vernünftige symmetrische SCC** auf zwei Alternativen.
 - ▶ Mehrheitswahl ist die **einzigste vernünftige symmetrische SCF** auf zwei Alternativen wenn es ungerade viele Wähler mit strikten Präferenzen gibt.
 - Wie sehen vernünftige SCFs auf mehr als zwei Alternativen aus?

SCFs mit mehr als zwei Alternativen

- Proposition: Es gibt **keine anonyme und neutrale SCF** auf mehr als zwei Alternativen, selbst wenn es ungerade viele Wähler mit strikten Präferenzen gibt.
 - ▶ Beweis: Tafel.
$$a \succ_1 b \succ_1 c$$
$$b \succ_2 c \succ_2 a$$
$$c \succ_3 a \succ_3 b$$
- Satz (Moulin, 1983): Es gibt keine anonyme und neutrale SCF für Wähler mit strikten Präferenzen wenn $|A|$ und n einen gemeinsamen (nicht-trivialen) Teiler haben.
 - ▶ In vielen Fällen ist es nicht möglich eine einzige Alternative auszuwählen.

Condorcet Paradoxon

Marquis de Condorcet (1743-1794)

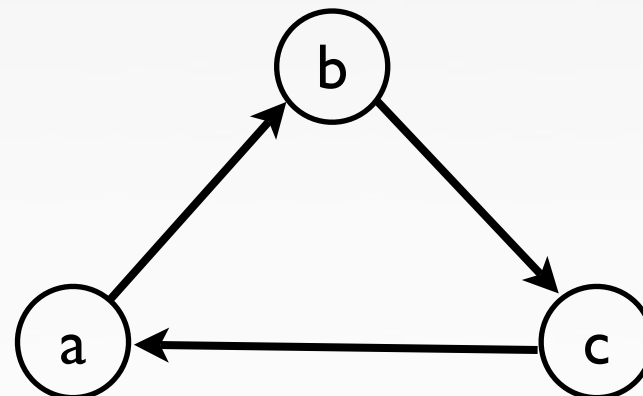


- Def.: Eine Alternative a ist ein **Condorcet-Gewinner**, wenn sich für jede andere Alternative b eine Mehrheit finden lässt, die a gegenüber b bevorzugt.
 - ▶ Condorcet-Gewinner sind eindeutig.
- Es ist möglich, dass kein Condorcet-Gewinner existiert.
 - ▶ Mehrheitswahl lässt sich nicht problemlos auf mehr als zwei Alternativen erweitern.

$$a \succ_1 b \succ_1 c$$

$$b \succ_2 c \succ_2 a$$

$$c \succ_3 a \succ_3 b$$



Mehrheits- oder Dominanzgraph

Ist das Condorcet-Paradoxon die Ausnahme oder die Regel?

- Wie groß ist die **Wahrscheinlichkeit**, dass es keinen Condorcet-Gewinner gibt?
 - ▶ z.B. bei drei Kandidaten und drei Wählern mit gleichverteilten strikten Präferenzen
 - 1/18 (also ca. 6%)
 - ▶ Grenzwerte der Wahrscheinlichkeiten für $n \rightarrow \infty$

 A 	1	2	3	4	5	10	15	20	25	30	35	40	45
p	0%	0%	9%	18%	25%	49%	61%	68%	73%	76%	79%	81%	82%

- ▶ Wenn $n \rightarrow \infty$ und $|A| \rightarrow \infty$ gibt es für die meisten vernünftigen Verteilungen von Präferenzen **keinen Condorcet-Gewinner**.

Eingeschränkte Modelle

- Def.: Eine Alternative a ist ein **schwacher Condorcet-Gewinner**, wenn sich für keine andere Alternative b eine Mehrheit finden lässt, die b gegenüber a bevorzugt.
 - ▶ Jeder starke Condorcet-Gewinner ist auch ein schwacher Condorcet-Gewinner.
 - ▶ Schwache Condorcet-Gewinner sind nicht eindeutig.
- In den folgenden Fällen ist die Existenz eines schwachen Condorcet-Gewinners garantiert:
 - ▶ Zwei Alternativen
 - ▶ Dichotome Präferenzen
 - ▶ Single-Peaked Präferenzen

Dichotome Präferenzen

- Def.: Eine Präferenzrelation $\succsim \subseteq A \times A$ ist **dichotom** wenn $A = A_1 \uplus A_2$ so dass
 - ▶ $\forall a, b \in A_i : a \sim b \quad (i \in \{1, 2\})$
 - ▶ $\forall a \in A_1, b \in A_2 : a \succ b$
 - ▶ Wähler kennen nur “gute” und “schlechte” Alternativen.
- Satz (Inada, 1964): Wenn alle Wähler dichotome Präferenzen haben, existiert immer ein schwacher Condorcet-Gewinner.
 - ▶ Beweis (Widerspruch): Sei a eine Alternative, die von den Wählern am häufigsten als “gute” Alternative genannt wird. Nehmen wir an, es gäbe eine Alternative b , die von einer Mehrheit von Wählern gegenüber a bevorzugt wird. Dann wäre b häufiger als a befürwortet worden.
 - ▶ Das zugehörige Wahlverfahren ist als **Approval Voting** bekannt.

Single-Peaked Präferenzen

- Def.: Eine Präferenzrelation $\succsim \subseteq A \times A$ heißt **single-peaked** bezüglich einer linearen Ordnung $\geq \subseteq A \times A$, wenn es eine Alternative $a \in A$ gibt, so dass
$$\forall b, c \in A : b \succ c \text{ wenn } a \geq b > c \text{ oder } c > b \geq a$$
 - ▶ Die Alternativen können bezüglich eines eindimensionalen Kriteriums sortiert werden (z.B. politisches rechts/links-Spektrum).
 - ▶ Jeder Wähler hat einen Idealpunkt in diesem Spektrum.
- Satz (Black, 1948): Wenn alle Wähler single-peaked Präferenzen bezüglich derselben linearen Ordnung haben, existiert immer ein schwacher Condorcet-Gewinner.
 - ▶ Beweisidee: Die bevorzugte Alternative des **Medianwählers** ist ein schwacher Condorcet-Gewinner.

Zusammenfassung

- Bei zwei Alternativen ist **Mehrheitswahl** das unumstrittene symmetrische Verfahren.
- Bei mehr als zwei Alternativen, gibt es Verfahren, die immer einen schwachen Condorcet-Gewinner auswählen wenn die Präferenzen der Wähler **dichotom** oder **single-peaked** sind.
 - ▶ Wenn es ungerade viele Wähler mit single-peaked Präferenzen gibt, existiert sogar immer ein starker Condorcet-Gewinner.
- Im Allgemeinen, d.h. bei mehr als zwei Alternativen und uneingeschränkten Präferenzen, ist unklar welches Verfahren “optimal” ist.